Soluções ER2019

I

1. Equação de Riccati, com a m.v. $x(t)=t+\dfrac{1}{z(t)}$ obtém-se a solução do PVI,

$$x(t)=t+\frac{1}{2e^{-t}-1}$$

2. **a)** $\alpha=-1, \beta=\gamma=0$

b) $x(t)=C_1+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}+\dfrac{t}{4}-\dfrac{t^2}{4}$, com $C_1, C_2, C_3 \in \Re$

3. **a)** Soluções de equilíbrio: $(0{,}0)$ instável, $(0,-2)$ instável, $(3{,}1)$ instável

b) $\begin{cases} x\ \ (t)=0 \\ y\ \ (t)=e^{-2t} \end{cases}$

II

$u_n=-1+kn+\dfrac{n^3}{6}$, com $k\in\Re$

III

1. As singularidades $z=0, z=-i$ encontram-se no exterior da curva de Jordan regular $|z-3i|=1$, e a singularidade $z=3i$ encontra-se no interior da curva. Aplicando as Fórmulas Integrais de Cauchy ou o Teorema dos Resíduos de Cauchy, obtém-se $\displaystyle\int_{|z-3i|=1}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2-2iz+3}dz=\frac{\pi}{2}e^{-\frac{1}{9}}$

2. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} \underset{hip}{=} \dfrac{l}{0} = \infty$, $l \neq 0$ por hipótese, o que prova z_0 ser um pólo; é simples pois, fazendo uso de todas as hipóteses, tem-se

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z_0)+\varphi'(z_0)(z-z_0)+\ldots+\dfrac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\ldots}{\psi(z_0)+\psi'(z_0)(z-z_0)+\ldots+\dfrac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\ldots} =$$

$$= \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} = k \neq 0, \infty.$$

Por fim, $\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.